-۱

از اصل متمم استفاده می‌کنیم و کل تعداد را منهای تعداد حالاتی می‌کنیم که حداقل یک بار در آن‌ها ترکیب سل-لا ظاهر شده باشد.

$$7^4 - 3 \times 7^2$$

اما چون در این شمارش حالت سل-لا-سل-لا را دوبار کم کرده‌ایم باید جواب به دست آمده را با یک جمع کنیم، پس حاصل برابر خواهد بود با

$$2255$$

گزینه ۴

-۲

از آنجایی که می‌دانیم تعداد یال‌های یک درخت $n-1$ است، حالت بندی می‌کنیم روی حذف ۵ تا از یال ها

یعنی در واقع حالت بندی می‌کنیم که از این ۵ یال حذف‌شده چندتایشان از یال‌های متصل به راس مرکز هستند

و سپس جواب به راحتی به دست می‌آید:

$$(1) + (5 \times 2) + (5 \times 3 + 5 \times 4) + (5 \times 4 + 5 \times 6) + (5 \times 5)$$

برابر با

$$121$$

گزینه ۵

-۳

اگر حالت بندی کنیم روی این که بزرگترین توانی از سه که عدد دوم بر آن بخش پذیر است. از آنجایی که می‌توانیم اعداد را برحسب بزرگترین توان سه دسته بندی کنیم جواب برابر خواهد بود با

$$\big(1 \times (81-1)\big) + \big(2 \times (81-1)\big) + \big(6 \times (27-1)\big) + (18 \times 9) + (54 \times 3)$$

برابر با

$$720$$

گزینه ۳

-۴

ثابت‌کنید در هر جفت متناظر یک عدد از اعداد ۱ تا ۶ هست و یک عدد از اعداد ۷ تا ۱۲

پس در همه حالات مختلف انتخاب دسته ها جواب برابر با

$$(7 + 8 + \cdots + 12) - (1 + 2 + \cdots + 6)$$

یعنی

است

گزینه ۱

-۵

با کمی‌دقت در جدول داده شده درمی‌یابیم که همان جدول ضرب است که ۴۵ درجه دوران داده شده است
سپس خیلی واضح خواهد بود که اگر بتوانیم یک عدد را به صورت $x \times k$ نشان دهیم
آن عدد در سطر $x + k - 1$ ظاهر شده است
پس اگرحالت بندی‌کنیم روی مقسوم‌علیه های عدد ۱۳۹۸ جواب به دست خواهد آمد
(1 + 1398 – 1) + (2 + 699 – 1) + (3 + 466 – 1) + (6 + 233 – 1)
برابر با

$$2804$$

گزینه ۵

-۶

اگر دقت کنید، خواهید فهمید که اگر فقط بدانیم چه مجموعه‌ای از اعداد در سمت راست عدد ۱۰ در جایگشت قرارمی‌گیرند، آن جایگشت یکتا خواهد بود، پس جواب برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۹ عضوی که برابر است با

$$2^9$$

یعنی

$$512$$

گزینه ۳

-۷

واضح است باید همه اعداد خانه‌های سفید کوچکترین اعداد باشند یا بزرگترین اعداد و بین این دو حالت تفاوتی نیست، تنها نکته‌ی مهم این است که یا عدد ۹ یا عدد ۱ در خانه مرکزی قرار بگیرد
و به این ترتیب جواب برابر خواهد شد با 58

3	9	2
8	1	6
4	7	5

گزینه ۴

-۸

احتمال این که هرکس یک آدم خودرای باشد برابر با این است که توسط یک نفرخاصل انتخاب شده باشد یعنی $\frac{1}{127}$

و چون ۱۲۸ نفر در این جمع وجود دارند امیدریاضی تعداد آدم‌های خودرای برابر است با $\frac{128}{127}$

گزینه ۵

-۹

ابتدا چون هیچ‌کس نمی‌تواند این جمله را بگوید که من‌دروغگو هستم
پس بهراد به بهزاد گفته است که من راستگو هستم و از این نتیجه می‌شود که بهزاد راستگو است
سپس با توجه به همان قضیه که کسی نمی‌تواند ادعا کند من دروغگو هستم از حرف بهرام نتیجه می‌گیریم که بهبود دروغگو است و بهرام نیز راستگو است
و با توجه به حرف بهروز بین بهروز و بهراد دقیقا یک‌نفر دروغگو است
پس تعداد دروغگو ها برابر است با ۲

گزینه ۳

-۱۰

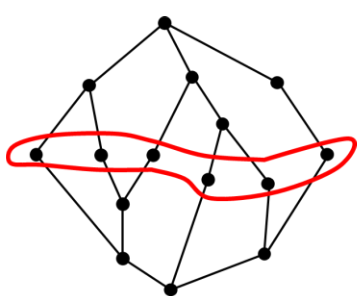
از حرف مهرسا می‌توان نتیجه گرفت که اگر دروغگو باشد، راستگو است که تناقض است، پس نتیجه می‌گیریم که او راستگو است و السا دروغگو است
از آنجایی که السا دروغگو است می‌توان نتیجه گرفت بین پریسا و آنیسا دقیقا یک دروغگو وجود دارد
و فرنگیس در اینجا هم می‌تواند دروغگو باشد، هم راستگو؛ پس حداکثر بین آن‌ها ۳ دروغگو وجود دارد

گزینه ۳

-۱۱

با کمی دقت به شکل می‌توان دریافت که تعداد دورهای این گراف برابر با تعداد راه‌های انتخاب یک جفت از مجموعه مشخص شده است که برابر است با

$$\binom{6}{2} = 15$$



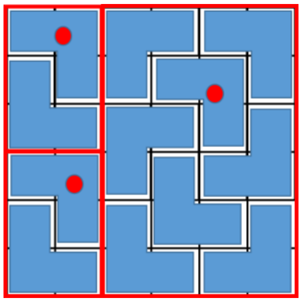
گزینه ۳

-۱۲

از مجموعه های مشخص شده باید حداقل یک کاشی چسبانده شود، وگرنه می‌توان آن مجموعه را به دو روش کاشی‌کاری کرد

و هم‌چنین با انتخاب کاشی‌های علامت زده شده می‌توان کاشی‌کاری را یکتا کرد

پس جواب برابر است با ۳



گزینه ۲

-۱۳

با کمی حالت‌بندی می‌توان فهمید که صندلی های دور میز را می‌توان به ۵ حالت جفت کرد به طوری که موقع دست‌دادن جفت‌ها با هم تقاطعی ایجاد نشود(این را با استفاده از اعداد کاتالان نیز می‌توان به راحتی محاسبه کرد)

پس تعداد حالات مطلوب نشستن این شش نفر روی صندلی ها برابر خواهد بود با

$$3 \times 2! \times 3 \times 5$$

که تقسیم بر کل حالات که برابر است با $6!$

جواب به دست خواهد آمد برابر $\frac{1}{3}$

گزینه ۴

-۱۴

در حالت های‌مختلف میتوانیم جدول برد و باخت را رسم کنیم و متوجه خواهیم شد که کارن درهیچ حالتی بازی را نخواهد برد

L	W	L	W	L	W
L	L	L	L	L	L
W	L	W	L	L	W
L	L	L	W	L	L
L	W	L	L	L	W
L	L	L	W	L	L

یعنی ۰

گزینه ۱

-۱۵
مشاهده می‌شود که هر دو عددی که تعداد ارقام یکشان در مبنای دو با هم برابر باشد در یک مولفه قرارمی گیرند.
پس بزرگترین مولفه در اینجا مولفه‌ی شامل اعدادی است که ۴ رقم یک در مبنای دو خود دارند.
از آنجایی که میدانیم مجموع درجه رئوس دو برابر تعداد یال هاست
می‌شود فهمید که تعداد یال ها برابر با

$$\binom{8}{4} \times 4 \times 4 \div 2$$

است یعنی

$$560$$

گزینه ۵

-۱۶
حرکت اول دو دسته ۳ تایی بر روی ترازو می‌گذاریم ({a1 , a2 , a3} و {a4 , a5 , a6})
اگر مساوی بودن :
با ۳ بار دیگر وزن کردن بدست می‌آیند (a1 , a2) ، (a3 , a7) و (a4 , a5)
اگر یک دسته سنگین تر بود : (طبق تقارن فرض می‌کنیم دسته اول سنگین‌تر باشد)
با ۳ بار دیگر وزن کردن بدست می‌آیند (a1 , a2) ، (a1 , a3) و (a1 , a7)
با ۳ حرکت نمی‌توان مشخص کرد دو سکه تقلبی $\binom{8}{2}$ یعنی ۲۸ حالت دارد و برای هر حالت دسته بندی ۳ جواب ممکن است و در یکی جواب‌ها بیش از یک سوم حالات باقی می‌ماند پس از ۳ بار دسته بندی حداقل ۲ حالت باقی می‌ماند پس نمی‌توان مشخص کرد.

گزینه ۳

-۱۷

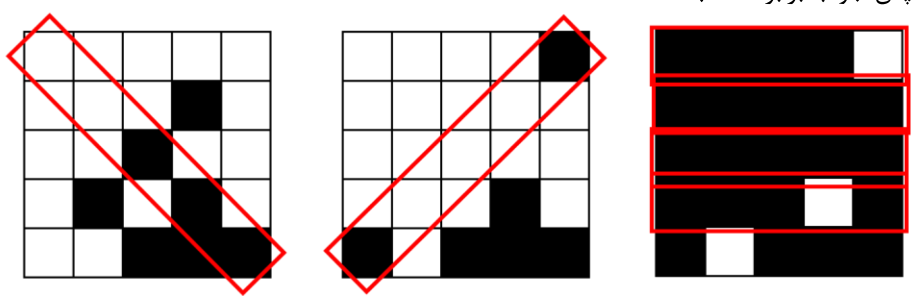
با حالت بندی مشخص می‌شود که حاصل یک از چهار مقدار ۰ ، ۲ ، ۴ و ۶ است.
کارت ها با ترتیب ۱ ۲ ۳ می‌چینیم اگر حاصل ۰ باشد ۲ ۱ ۳ ، اگر حاصل ۲ باشد ۳ ۲ ۱ و اگر حاصل ۴ باشد ۱ ۳ ۲ جواب است.

پس جواب یکبار پرسش است

گزینه ۲

-۱۸

با انجام دادن هر یک از عملیات های انجام شده، زوجیت تعداد خانه های سیاه در مجموعه های مشخص شده تغییری نمی کند، پس جواب حداکثر برابر است با ۲۲ است
و هم چنین با عملیات های نشان داده شده در شکل این عدد قابل دسترسی است
پس جواب برابر است با ۲۲



گزینه ۲

-۱۹

هر مستطیل سه در شش کناری را می توان با $\binom{6}{3}$ حالت مستقل از مستطیل دیگر پر کرد
پس جواب برابر است با

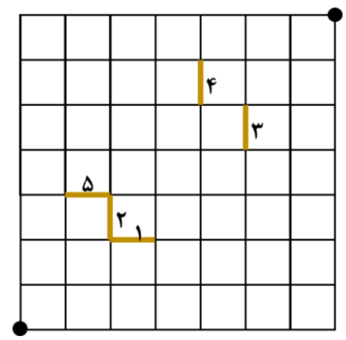
$$\binom{6}{3}^2 \times 2$$

اما ما یک حالت را در اینجا دوبار شمرده ایم، و آن حالتی است که میله‌های مربع های سه در سه را پر کنند.

پس جواب برابر است با

گزینه ۲

-۲۰



یال های ۱و ۲و ۳ هر کدام $\binom{9}{4} \times \binom{4}{2}$ بار در جواب نهایی شمرده می‌شوند

و یال های ۴و ۵ هر کدام $\binom{9}{4} \times \binom{4}{1}$ بار شمرده می‌شوند

پس در مجموع جواب برابر است با

$$3 \times \binom{4}{2} \times \binom{9}{4} + 2 \times \binom{4}{1} \times \binom{9}{4}$$

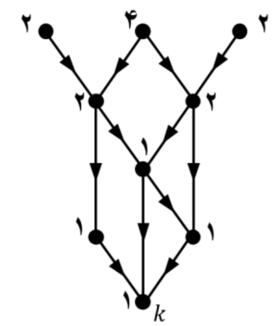
یعنی

3276

گزینه ۲

-۲۱

خیلی راحت می‌توان از روی شکل با روش پویا تعداد کوتاه ترین مسیر های هرکس را به دست آورد و جمع زد



۱۶
جواب است

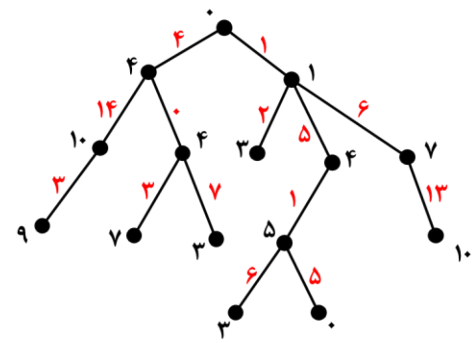
گزینه ۳

-۲۲
جواب برابر است با ۴
یعنی دنباله
12, 13, 18, 26

اما چرا هیچ موزی با طول بیشتر از چهار وجود ندارد
با کمی دقت بیشتر متوجه می‌شویم که اگر موزی با طول پنج وجود داشته باشد اختلاف عضو اول و آخر حداقل ده برابر عضو اول و دوم است، پس اختلاف دو عضو اول اگر بیشتر از دو باشد به هیچ وجه نمی‌تواند طولش بیشتر از چهار باشد
و در بقیه‌ی حالات نیز میتوان دید که این امر امکان پذیر نیست (با حالت بندی)
پس جواب همان
۴
است

گزینه ۲

-۲۳
اگر روی هر راس ایکس‌اور یال های مسیرش تا ریشه‌ی درخت را بنویسیم جواب برابر است با تعداد جفت راس هایی که عدد برابری دارند



یعنی

۹

گزینه ۴

-۲۴

واضح است با عملیات گفته شده زوجیت جایگاه هیچ عددی تغییر نمی‌کند، ولی می‌توان با عملیات گفته شده به همه‌ی جایگشت هایی که این شرط را حفظ می کنند رسید

پس جواب برابر است با

$$4! \times 3!$$

یعنی

$$144$$

گزینه ۲

-۲۵

همه‌ی جایگشت ها را می‌توان مرتب کرد

به این ترتیب که ابتدا سعی‌می‌کنیم اعداد ۲و ۴ را در جایگاه خود قرار دهیم و سپس بقیه‌ی جایگشت را فقط با برعکس کردن های به طول ۳ مرتب می‌کنیم

$$120$$

گزینه ۵

-۲۶

قابل دریافت است که اگر عددی مانند x را با عددی مثل y سیکنور بگیریم و دوباره این عملیات را تکرار کنیم عدد حاصل برابر خواهد بود با عددx

پس در واقع دو عدد ۱۰۱ میانی در جواب بی‌تاثیر خواهند بود و می‌توانیم آن دو عدد را حذف شده در نظر بگیریم
و به همین ترتیب جواب برابر خواهد بود با سیکنور ۱ و ۱
که حاصلش برابر است با
۱

گزینه ۲

-۲۷
سیکنور دو رقم x و y در واقع برابر (x+y)- به پیمانهی ۳ است.
با این دید حاصل
-۱-۲+۳...+۹۹-۱۰۰+۱۰۱-۱۰۱+۱۰۰-۹۹...-۳+۲-۱
می‌شود بطوری که هر رقمش جدا و به پیمانه‌ی ۳ محاسبه شود.
همانطور که مشاهده می شود اکثر عدد ها ساده می‌شوند و تنها ۱-۱- باقی می‌ماند که حاصل این به پیمانه‌ی ۳ برابر ۱ است

گزینه ۲

-۲۸
فرض کنید اعداد a1 تا a7 در برگ‌ها قرار داده شوند و سیکنور گرفته شود حاصل طبق تعریف قبل a1+a2..+a7+ می‌شود پس ترتیب اعداد تاثیری نخواهد داشت و حاصل یکتا است با جایگذاری اعداد دلخواهی حاصل بدست می آید.

جواب مقدار ۴ است.

گزینه ۱

-۲۹

مسیر بزرگترین مهره باید خالی باشد پس در هر جفت راس یکی باید خالی باشد و در راس دیگر تعدادی مهره می‌توانیم قرار دهیم که بتوان از راس شروع آن تعداد مهره را به آن راس رساند و روی هم قرار بگیرند و از آن راس بتوان آن تعداد مهره را به راس پایان برد.

با حالت بندی بدست می‌آید که در راس‌ها به ترتیب این مقادیر می‌توان مهره قرار داد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۲ ، ۱ که به همراه مهره آخر سنگین‌ترین مهره ۱۰ مهره می‌شوند.

گزینه ۲

-۳۰

با بررسی دقیق‌تر بدست می‌آید که در هر راس دارای مهره با توجه به فاصله‌اش نسبت به نقطه شروع و پایان بدست می‌آید که چند مهره در آن می‌توان قرار داد.

اگر فاصله نسبت به نقطه شروع x و فاصله نسبت به نقطه پایان y باشد تعداد مهره هایی که می توان در آن قرار داد برابر است با

$$\min(f(\left[\frac{x}{2}\right]) , f(\left[\frac{y}{2}\right]))$$

اگر تابع $f(n)$ مقادیر جواب برای مسیرها به طول ۲n باشد.

($f(0)$ را ۱ در نظر بگیرید)

$$f(10) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(0) +1 = 30$$

گزینه ۵