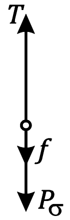
۱. گزینه ۴



به درپوش لاستیکی یک نیروی نخ به سمت بالا همچنین یک نیروی اصطکاک و یک نیرو ناشی از فشار آب به سمت پایین وارد می‌شود. نیروی نخ برابر است با: $T = \rho Vg - mg$

مچنین برای اینکه درپوش در آستانه بیرون کشیده شدن قرار گیرد باید داشته باشیم:

$$T = f + P\sigma \quad , \quad P = \rho gh$$

از آن‌جا که با قرار گرفتن بادکنک درون آب، سطح آب بالا می‌رود، در نتیجه ارتفاع آب برابر است با:

$$h = \frac{v_0 + v}{A} \Rightarrow \rho Vg - mg = f + \frac{\rho g(V_0 + V)}{A} \Rightarrow V = \frac{fA + mgA + \rho g\sigma V_0}{\rho g(A - \sigma)}$$

۲. گزینه ۱

فرض می‌کنیم که: $n_f = n_1 + n_2 + \cdots + n_N$

ظرفیت گرمایی در این فرآیند را C و جرم مولی را M و دمای نهایی گاز را T_f در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که ظرف عایق بوده و کاری نیز روی گاز انجام نشده است خواهیم داشت:

$$n_1MC(T_f - T_1) - n_2MC(T_f - T_2) + \cdots + n_NMC(T_f - T_N) = 0$$

$$T_f = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i T_i}{n_f}$$

همچنین با توجه به معادله حالت گاز کامل برای حالت نهایی گاز داریم:

$$PV = n_f RT_f \Rightarrow P = \frac{n_f R}{V}\frac{\sum_{i=1}^{N} n_i T_i}{n_f} = \frac{R}{V}\sum_{i=1}^{N} n_i T_i$$

۳. گزینه ۳

$$r < R : B \times 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2R^2}$$

$$r > R : B \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

۴. گزینه ۲

ابتدا شدت جریان این صاعقه را پیدا می‌کنیم: (مقدار بار الکتریکی تخلیه‌شده حداکثر از مرتبه ده کولن است)

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{10C}{10^{-4}s} = 10^5 A$$

حال با توجه به اینکه میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان برابر است با $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ بنابراین:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^5}{2\pi \times 10} = 2 \times 10^{-2} T = 2mT$$

۵. گزینه ۳

وقتی با شتاب ظرف را به سمت راست حرکت می‌دهم، فشار آب در سمت چپ ظرف بیشتر از سمت راست ظرف شده و توپ را به سمت راست هل می‌دهد. توجه کنید که چگالی توپ بسیار کمتر از آب است.

۶. گزینه ۴

در آزمایش اول ابتدا خازن دوم پر شده است و وقتی نقطه B را به A متصل می‌کنیم، با روی خازن شروع به تخلیه شدن می‌کند. در لحظه اول ولتاژ دو سر خازن برابر با ولتاژ باتری‌ای است که با آن شارژ شده و با توجه به این‌که این ولتاژ به دو سر مقاومت متصل شده، در لحظه اول جریان $۱/۸mA$ را به ما داده است. در نتیجه ولتاژ باتری برابر است با:

$$V = RI = ۵۰۰۰ \times \frac{۱۸}{۱۰۰۰۰} = ۹V$$

در آزمایش دوم خازن ۱ با ولتاژ باتری پر شده و بعد با خازن ۲ موازی شده است، بنابراین:

$$Q_۱ = C_۱V \quad , \quad q_۱ + q_۲ = Q_۱ \quad , \quad \frac{q_۱}{C_۱} = \frac{q_۲}{C_۲} = V_۲$$

که در روابط بالا $Q_۱$ بار اولیه خازن ۱ پس از پر شدن توسط باتری، $q_۱$ و $q_۲$ بار خازن‌ها پس از موازی شدن با یکدیگر و رابطه سوم از تساوی ولتاژ خازن‌ها به دلیل موازی بودن به‌دست می‌آید و در آن $V_۲$ ولتاژ نهایی خازن ۲ می‌باشد. از روابط بالا داریم:

$$C_۱V = q_۱ + q_۲ = C_۱V_۲ + C_۲V_۲ \;\Rightarrow\; C_۱ = \frac{C_۲V_۲}{V - V_۲} = ۵۲۰۰\mu F$$

۷. گزینه ۴

برآیند نیروهایی که در فاصله r از محور دوران به یک المان جرمی m وارد می‌شود برابر است با:

$$A(p(r+dr) - p(r)) = m\omega^۲ r$$

همچنین با توجه به معادله حالت گاز کامل خواهیم داشت:

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; \rho(r) = \frac{m}{V} = \frac{m}{nRT}p(r) = \frac{\mu}{RT}p(r)$$

و می‌دانیم که حجم المان فرض شده برابر است با $dv = Adr$ و $m = \rho(r)dv$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{p(r+dr) - p(r)}{dr} = p'(r) = \frac{\mu\omega^۲}{RT} r p(r)$$

۸. گزینه ۲

از آنجا که طول طناب تغییر نمی‌کند در نتیجه انتهای طناب روی کمانی از دایره حرکت می‌کند و با توجه به اینکه α عددی کوچک است پس طول این کمان تقریبا با افزایش طول میله ΔL برابر است، اگر زاویه این کمان را θ فرض کنیم آنگاه:

$$\Delta L = \theta L$$

همچنین تغییر طول میله بر اثر تغییر دما برابر است با:

$$\Delta L = L\alpha T$$

در نتیجه:

$$\theta = \alpha T$$

۹. گزینه ۱

مرکز یک ناحیه تیره زمانی ایجاد می‌شود که جابه‌جایی خطوط طرح دوم به مقدار $\frac{p}{۲}$ باشد. فرض می‌کنیم که از وسط ناحیه روشن تا وسط ناحیه تیره n خط وجود داشته است پس در نتیجه $n\delta p$ جابه‌جایی خطوط طرح دوم خواهد بود و خواهیم داشت:

$$n.\delta p = \frac{p}{۲}$$

و n برابر خواهد بود با:

$$n = \frac{p}{2\delta p}$$

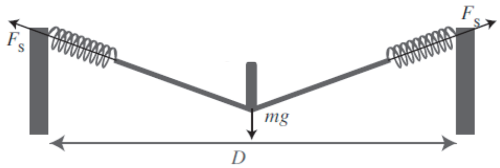
فاصله یک ناحیه تیره با روشن طبق طلق اول برابر است با:

$$d = n.p = \frac{p^2}{2\delta p}$$

در نتیجه فاصله دو ناحیه تیره برابر می‌شود با:

$$2d = \frac{p^2}{\delta p}$$

۱۰. گزینه ۱



زاویه ایجادشده بین فنر و طناب با سطح افق را θ در نظر می‌گیریم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$2F\sin\theta = mg$$

طول اولیه طناب برابر خواهد بود با $L = D - 2S$ و همچنین طول اضافه شده به فنر در حالت کشیدگی را x در نظر می‌گیریم بنابراین طول طناب و فنر در یک سمت فرد (وتر مثلث ایجاد شده بین پایه و فرد) برابر است با:

$$d = S + x + \frac{D-2S}{2} = x + \frac{D}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{P}{x+\frac{D}{2}}$$

همچنین نیروی فنر برابر است با:

$$F = kx$$

به این ترتیب معادله به صورت روبرو خواهد بود:

$$2kx\frac{P}{x+\frac{D}{2}} = mg$$

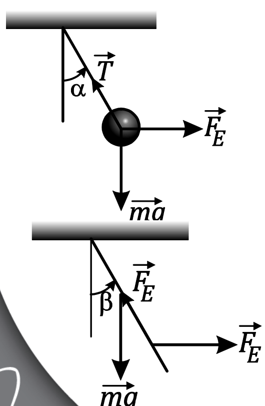
همچنین برای محاسبه x می‌دانیم که:

$$\sqrt{(\frac{D}{2})^2 + P^2} = x + \frac{D}{2}$$

در نتیجه m برابر خواهد بود با:

$$m = \frac{2kp(\sqrt{(\frac{D}{2})^2 + p^2} - \frac{D}{2})}{g\sqrt{(\frac{D}{2})^2 + P^2}}$$

۱۱. گزینه ۲



میزان انحراف گلوله:

$$F_E l\cos\alpha = mgl\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{F_E}{mg}$$

میزان انحراف میله: (توجه می‌کنیم که بخاطر رسانا بودن میله بارها در نوک آن تجمع خواهند کرد و چگالی بار نزدیک نوک میله بیشتر است، می‌توان چیزی بین وسط و نوک میله در نظر گرفت.)

$$\frac{l}{۲} < l' < l$$

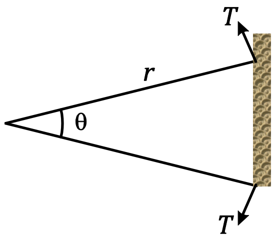
$$F_E \frac{l}{۲} \cos\beta < F_E l' \cos\beta = mg \frac{l'}{۲} \sin\beta < F_E l \cos\beta \;\Rightarrow\; \frac{F_E}{mg} < \tan\beta < \frac{۲F_E}{mg}$$

در نتیجه میزان انحراف میله بیشتر است زیرا:

$$\tan\alpha < \tan\beta < ۲\tan\alpha$$

۱۲. گزینه ۲

سرعت انتشار موج در طناب برابر است با:



$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

بنابراین باید ابتدا کشش طناب را بیابیم:

$$۲T \sin(\frac{\theta}{۲}) = \Delta m r \omega^۲$$

از آنجا که $\Delta m = \frac{\theta}{۲\pi} M$ بنابراین برای زوایای کوچک داریم:

$$۲T \frac{\theta}{۲} = \frac{\theta}{۲\pi} M r \omega^۲ \;\Rightarrow\; T = \mu r^۲ \omega^۲$$

حال با جایگذاری در رابطه سرعت انتشار داریم:

$$v = \sqrt{\frac{\mu r^۲ \omega^۲}{\mu}} = r\omega = \frac{L}{۲\pi}\omega$$

که انتظار آن را نیز داشتیم، حالبرای اینکه موج ایستاده تولید کنیم باید نسبت‌های صحیحی از زمان یک دور موج، موج‌های بعدی تولید شوند، بنابراین:

$$= \frac{L}{\frac{L}{۲\pi}} = \frac{۲\pi}{\omega}$$

بنابراین فرکانس موج $f = \frac{\omega}{۲\pi}$، حال باید $N\frac{\omega}{۲\pi}$ ضرایب صحیح این فرکانس را تولید کنیم تا موج ایستاده داشته باشیم، پس با فرکانس‌های می‌توانیم در این طناب موج ایستاده تولید کنیم.

۱۳. گزینه ۴

ابتدا نیروی دافعه‌ای که به یکدیگر وارد می‌کردند برابر بوده است با:

$$F = k\frac{q_۱ q_۲}{r^۲}$$

اما وقتی دو گوی را به یکدیگر تماس می‌دهم بخاطر مشابه بودن بار هر دوی آنها برابر می‌شود با $q = \frac{q_۱ + q_۲}{۲}$ بنابراین نیروی دافعه جدیدی که بر یکدیگر وارد می‌کنند برابر است با:

$$F' = k\frac{(\frac{q_۱ + q_۲}{۲})^۲}{r^۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{F'}{F}=\frac{(\frac{q_1+q_2}{2})^2}{q_1q_2}=\frac{q_1^2+q_2^2+2q_1q_2}{4q_1q_2}\Rightarrow\frac{F'}{F}=\frac{q_1^2+q_2^2}{4q_1q_2}+\frac{1}{2}$$

و از انجا که

$$\frac{q_1^2+q_2^2}{4q_1q_2}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{F'}{F}\geq 1$$

۱۴. گزینه ۳

ابتدا کار انجام شده روی جسم را در این بازه محاسبه می‌کنیم:

$$W=\Delta K=-\Delta U=4j$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=4j\Rightarrow v^2-10^6=8\times10^6\Rightarrow v^2=9\times10^6\Rightarrow v=3\times10^3\frac{m}{s}$$

۱۵. گزینه ۲

نقطه A را درسطح بالایی آب و نقطه B را در محل خروج آب از ظرف در نظر گرفته‌ایم.

$$\frac{v_A^2(t)}{2}+\frac{p_A}{\rho}+gh_A(t)=\frac{v_B^2(t)}{2}+\frac{p_B}{\rho}+gh_B(t)$$

با این فرض که فشار هوای محیط P_0 و سطح بالایی مخروط آنقدر بزرگ است که سرعت تغییر ارتفاع آب در آن صفر است خواهیم داشت:

$$\frac{p_0}{\rho}+gh_A(t)=\frac{v_B^2(t)}{2}+\frac{p_0}{\rho}+gh_B(t)$$

سرعت خروج آب برابر است با:

$$v_B(t)=\sqrt{2g(h_A(t)-h_B(t))}=\sqrt{2gh(t)}$$

همچنین در هر لحظه رابطه بین شعاع سطح بالایی آب با ارتفاع آب برابر است با:

$$\frac{r(t)}{h(t)}=\frac{b}{h_0}\Rightarrow r(t)=h(t)\frac{b}{h_0}$$

حجم آب داخل منبع برابر است با:

$$V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t)=\frac{\pi}{3}(\frac{b}{h_0})^2h^3(t)$$

برای شار آب خروجی از منبع داریم:

$$\Phi(t)=Av(t)=(\pi a^2)v(t)=\pi a^2\sqrt{2gh(t)}$$

در این رابطه A مساحت دریچه خروجی آب و $v(t)$ سرعت خروج آب است که پیش از این ذکر شد. حال با تساوی شار خروجی آب با منفی تغییرات حجم بر حسب زمان رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\dot V(t)=-\Phi(t)$$

$$\dot V(t)=\frac{\pi}{3}(\frac{b}{h_0})^2 3h^2(t)h(t)=\pi(\frac{b}{h_0})^2h^2(t)\dot h(t)$$

$$\pi(\frac{b}{h_0})^{22}h(t)\dot h(t)=-\pi a^2\sqrt{2gh(t)}\Rightarrow(\frac{b}{h_0})^2h^{\frac{3}{2}}(t)\dot h(t)=-a^2\sqrt{2g}$$

$$h^{\frac{3}{2}}(t)\dot h(t)=\frac{2}{5}\frac{d}{dt}h^{\frac{5}{2}}(t)\Rightarrow\frac{d}{dt}h^{\frac{5}{2}}(t)=-\frac{5}{2}(\frac{h_0}{b})^2a^2\sqrt{2g}$$

معادله بالا نشان می‌دهد که رابطه h بر حسب زمان به‌صورت $h(t)\propto t^{\frac{2}{5}}$ که از یک مقدار اولیه h_0 آغاز می‌گردد.

۱۶. گزینه ۲

با رسیدن به یک دمای پایدار کل گرمای تولید شده با انتقال از صفحه فلزی اتلاف می‌شود، پس توان گرمایی برابر است با گرمای منتقل شده در واحد زمان، بنابراین:

$$P = H = \frac{kA}{d}(۴۰ - ۲۱) = ۳۵W$$

در این رابطه k ضریب انتقال گرما، A سطح مقطع فلز و d ضخامت فلز می‌باشد. در نتیجه:

$$\frac{kA}{d} = \frac{۳۵}{۱۹}$$

بعد از خاموش شدن CPU ، گرمای منتقل شده به محیط برابر است با:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{kA}{d}(T - ۲۱) \quad , \quad \frac{dQ}{dt} = C\frac{dT}{dt}$$

که C ظرفیت گرمایی CPU است. با توجه به معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\int_{۴۰}^{۲۱} CdT = \int_{۰}^{۱۰۰۰} \frac{-kA}{d}(T - ۲۱)dt = -\frac{۳۵}{۱۹}\int_{۰}^{۱۰۰۰}(T - ۲۱)dt = -\frac{۳۵}{۱۹}s$$

که در معادله بالا S مساحت زیر نمودار داده شده در بازه دمایی ۴۰ تا ۲۱ درجه سانتی‌گراد می‌باشد. به‌صورت تقریبی این مساحت برابر است با $S = ۶۸۰۰°C$ و پاسخ انتگرال اول نیز برابر است با:

$$\int_{۴۰}^{۲۱} CdT = -۱۹C \; , \; -۱۹C = -\frac{۳۵}{۱۹}(۶۸۰۰) \; \Rightarrow \; C \approx ۶۶۰\,(\frac{J}{K})$$

که گزینه ج نزدیکترین گزینه به پاسخ مسئله است.

۱۷. گزینه ۳

با توجه به معادله حالت گاز کامل و با توجه با ثابت بودن دما در حین فرآیند باد شدن خواهیم داشت:

$$I)\; \frac{P_۱V_۱}{n_۱} = \frac{P_۲V_۲}{n_۲} \quad , \quad n_۱ = n \quad , \quad n_۲ = Nn + n$$

که N تعداد دفعاتی است که بادکنک را باید فوت کرد. از آنجا که قرار است شعاع ثانویه بادکنک دو برابر حالت اولیه شود تا بترکد، در نتیجه:

$$V_۲ = \frac{۴\pi(۲R_۰)^۳}{۳} = ۸(\frac{۴\pi R_۰^۳}{۳}) = ۸V_۱$$

همچنین طبق معادله داده شده در مسئله، رابطه فشار با شعاع برابر خواهد بود با:

$$P = P_۱ + (\frac{R - R_۰}{A})^۳ \xrightarrow{R = ۲R_۰} P_۲ = (\frac{R_۰}{A})^۳ + P_۱$$

حال با قرار دادن در معادله (I) خواهیم داشت:

$$nP_۱ + NnP_۱ = ۸\frac{nR_۰^۳}{A^۳} + ۸nP_۱$$

و در نهایت N برابر خواهد بود با:

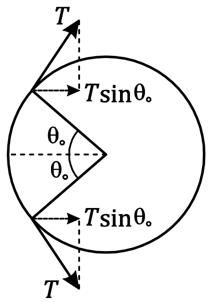
$$N = \frac{۸nR_۰^۳}{nP_۱A^۳} + ۷ \quad , \quad R_۰ = \frac{AP_۰^{\frac{۱}{۳}}}{۲} \; \Rightarrow \; N = \frac{P_۰}{P_۱} + ۷$$

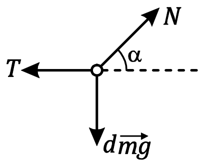
طبق صورت سوال در ابتدا بادکنک به سختی باد شده، در نتیجه فشار درون بادکنک باید بر فشار هوا و کشش بادکنک غلبه کند، پس می‌توان نتیجه گرفت $P_۱ > P_۰$ و این یعنی این که در حین هشتمین فوت بادکنک می‌ترکد. پس تا قبل از ترکیدن بادکنک، ۷ مرتبه می‌توان آن را فوت کرد.

۱۸. گزینه ۴

نیروهای وارد بر یک قطعه از زنجیر را بررسی می‌کنیم، با این فرض که جرم این قطعه را dmفرض می‌کنیم، نیروی عمودی سطح را N و نیروی کشش نخ را T در نظر می‌گیریم.

برای یک المان کوچک از طول زنجیر، نیروی زنجیر از طرفین در یک زاویه کوچک وارد می‌شود و این زاویه را $2\theta_0$ در نظر می‌گیریم. نیرویی که با مؤلفه افقی N خنثی می‌گردد، مؤلفه شعاعی نیروی نخ می‌باشد و معادلات به صورت زیر خواهد بود:





$$1)\ 2T\sin\theta_0 - N\cos\alpha = 0$$

$$2)\ N\sin\alpha - dmg = 0 \Rightarrow N = \frac{dmg}{\sin\alpha}$$

از معادلات ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$2T\sin\theta_0 = dmg\cot\alpha$$

از طرفی با توجه به کوچک بودن المان $\sin\theta_0 \approx \theta_0$ و جرم المان برابر است با $dm = \frac{2R\theta_0 M}{L}$ که R شعاع حلقه است.

بنابراین خواهیم داشت:

$$2T\theta_0 = \frac{2R\theta_0 Mg\cot\alpha}{L} \quad , \quad T = \frac{RM\cot\alpha}{L}$$

می دانیم که $R = \frac{L}{2\pi}$ در نتیجه:

$$T = \frac{Mg\cot\alpha}{2\pi}$$

۱۹. گزینه ۲

توان آسانسور برابر است با حاصل ضرب نیرویی که به افراد وارد می‌کند در سرعت حرکت آسانسور و از آنجایی که تنها در راستای قائم به افراد نیرو وارد می‌شود تا آنها را به ارتفاع hبالا ببرد در نتیجه خواهیم داشت:

$$P = Fv \quad , \quad F = 30mg \quad , \quad v = \frac{h}{T}$$

که در رابطه بالا Fبرای ۳۰ نفر موجود بر روی پله‌ها در هر لحظه محاسبه شده است و تنها مؤلفه در راستای نیروی سرعت در رابطه توان مورد استفاده قرار گرفته است. $h = 0/3 \times 60 = 18m$ و $T = 90$ و همچنین $F = 2250kg$ در نتیجه توان برابر می‌شود با:

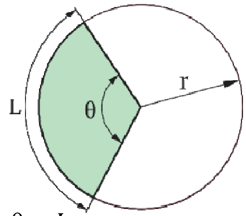
$$P = Fv = \frac{30mgh}{T} = 4500W$$

۲۰. گزینه ۳

پس از ورود به ناحیه میدان مغناطیسی، با توجه به اینکه نیروی ناشی از میدان مغناطیس همواره بر جهت حرکت عمود است، میدان مغناطیسی کاری روی ذرات انجام نمی‌دهد و سرعت خطی ذرات تغییری نمی‌کند و تنها جهت آن عوض می‌شود و با توجه به عمود بودن این نیرو بر جهت حرکت، دو ذره بر روی یک دایره دوران خواهند کرد. شعاع این دایره برابر است با:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

با توجه به عدم تغییر اندازه سرعت، فاصله دو جسم به همان مقدار اولیه Lباقی خواهد ماند. پس دو ذره همواره در ابتدا و انتهای کمانی به طول Lقرار دارند و فاصله دو سر این کمان را (که آن را aفرض می‌کنیم) باید محاسبه کرد و همچنین این کمان قطاعی از دایره به شعاع r می‌باشد.



$$r\theta = L \qquad , \qquad a = ۲r\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$a = ۲r\,sin\frac{L}{۲r} = \frac{۲mv}{qB}sin\frac{LqB}{۲mv}$$

۲۱. گزینه ۲

آب در فضا مسیر یک پرتابه را طی می‌کند و معادله یک پرتابه برابر است با:

$$y = -\frac{gx^{۲}}{۲v_{\circ}^{۲}\cos\theta^{۲}} + x\tan\theta \Rightarrow x_{max} = \frac{v_{\circ}^{۲}\sin ۲\theta}{g}$$

ماکزیمم برد دریک پرتابه زمانی رخ می‌دهد که زاویه ۴۵ درجه باشد در نتیجه انتهای مسیر پرتابه از زاویه صفر تا ۴۵ درجه از مبدأ به سمت راست حرکت خواهد کرد. همچنین پرتابه در زاویه ۱۳۵ درجه نیز بیشترین برد خود را در سمت چپ خواهد داشت یعنی از زاویه ۴۵ تا ۱۳۵ درجه، انتهای مسیر پرتابه از راست به چپ حرکت می‌کند. از زاویه ۱۳۵ تا ۱۸۰ درجه، دوباره از چپ به سمت مبدأ یعنی راست حرکت می‌کند. پس بین زوایای صفر تا ۴۵ و ۱۳۵ تا ۱۸۰ از چپ به راست می‌رود. مجموع این زوایا برابر است با ۹۰ درجه و این زاویه را فواره با سرعت زاویه‌ای ωطی کرده است. پس زمان این حرکت برابر است با:

$$t = \frac{\pi}{۲\omega}$$

۲۲. گزینه ۲

با توجه به معادله نیروی ارشمیدس و برابری آن با وزن مجموعه داریم:

$$\rho_۱ v_۱ g + \rho_۲ v_۲ g = \rho_۳\frac{v_۲}{۲}g \qquad (۱)$$

که اندیس ۱ مربوط به آهن، اندیس ۲ مربوط به چوب پنبه و اندیس ۳ مربوط به آب است. زمانی که قطعه آهن به زیر چوب پنبه بسته می‌شود معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\rho_۱ v_۱ g + \rho_۲ v_۲ g = \rho_۳\left(kv_۲ + v_۱\right)g \qquad (۲)$$

که در رابطه بالا k نسبتی از حجم چوب است که درون آب قرار گرفته است. از تساوی معادله ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\rho_۳\frac{v_۲}{۲}g = \rho_۳\left(kv_۲ + v_۱\right)g \Rightarrow k = \frac{۱}{۲} - \frac{v_۱}{v_۲}$$

حال باید دید نسبت بین $v_۱$و $v_۲$ چگونه است. طبق معادله ۱ داریم:

$$\frac{\rho_۱}{\rho_۳}\frac{v_۱}{v_۲} + \frac{\rho_۲}{\rho_۳} = \frac{۱}{۲}$$

با توجه به این معادله نسبت $\frac{\rho_۲}{\rho_۱}$باید کوچکتر از ۵/۰ باشد پس فرض می‌کنیم بین ۱/۰ تا ۴/۰ قرار دارد، همچنین $\frac{\rho_۱}{\rho_۳}$ نسبت بین چگالی آهن به آب می‌باشد و آن را بین ۳ تا ۱۰ در نظر می‌گیریم. در واقعیت نسبت بین چگالی چوب پنبه به آب

تقریبا ۲/۰ و نسبت بین چگالی آهن به آب ۸/۷ می‌باشد. در این حالت نسبت $\frac{v_۱}{v_۲}$ در بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین حالت برابر است با:

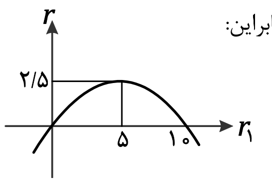
$$۰/۰۱ < \frac{v_۱}{v_۲} < ۰/۱۳ \Rightarrow ۰/۳۷ < k < ۰/۴۹$$

۲۳. گزینه ۱

از آنجا که مقاومت معادل مورد نظر زمانی بیشینه می‌شود که مقاومت معادل در بخش موازی بیشینه شود (که زمانی رخ می‌دهد که مقاومت‌های موازی برابر باشند، که در ادامه ثابت می‌کنیم)، بنابراین:

$$r = \frac{r_۱ r_۲}{r_۱ + r_۲} = \frac{r_۱(۱۰ - r_۱)}{۱۰}$$

از آنجا که صورت کسر مشابه با یک سهمی قائم است به‌صورت $y = \frac{۱}{۰}(-x^۲ + ۱۰x)$ ، بنابراین:



در نتیجه مقدار بیشینه r به اندازه ۵/۲ اهم خواهد بود. بنابراین:

$$R_{\max} = r_۱ + r_۲ + r = (r_۱ + r_۲) + r_{\max} = ۱۰\Omega + ۲/۵\Omega = ۱۲/۵\Omega$$

۲۴. گزینه ۱

ابتدا کار انجام شده توسط باد را به‌دست می‌آوریم، جابه‌جایی کره در راستای افق برابر است با:

$$x = \sqrt{L^۲ - (L-H)^۲} = \sqrt{۲LH - H^۲}$$

همچنین با توجه به اینکه نیروی باد برابر است با $F = \sigma\pi r^۲$ ، کار انجام شده توسط باد برابر است با:

$$W_{\text{باد}} = \sigma\pi r^۲ \sqrt{۲LH - H^۲}$$

حال اندازه این کار برابر است با کار انجام شده توسط زمین (که کاری است منفی)، همچنین نیاز به یاد آوری است که با توجه به عمود بودن نیروی طناب به مسیر دایره‌ای حرکت، کار نیروی طناب صفر خواهد بود. بنابراین:

$$\sigma\pi r^۲ \sqrt{۲LH - H^۲} = mgH \Rightarrow \sigma^۲\pi^۲ r^۴ (۲LH - H^۲) = m^۲ g^۲ H^۲$$

$$(m^۲ g^۲ + \sigma^۲\pi^۲ r^۴)H = ۲L\sigma^۲\pi^۲ r^۴ \Rightarrow H = \frac{۲L\sigma^۲\pi^۲ r^۴}{m^۲ g^۲ + \sigma^۲\pi^۲ r^۴}$$

۲۵. گزینه ۱

a_n را شتاب قرقره nاُم و T_n را نیروی نخ آویزان از قرقره nاُم در نظر می‌گیریم. برای قرقره اول $T_۱ = ۲T_۲$ و به همین ترتیب برای قرقره nاُم، $T_n = \frac{T_{n-۱}}{۲} = \frac{T_۱}{۲^{n-۱}}$ خواهد بود. با نوشتن معادله قانون دوم نیوتن برای قرقره اول خواهیم داشت:

$$T_۱ - mg = ma_۱ \Rightarrow T_۱ = mg + ma_۱ = mg + ma_۲$$

برای قرقره بعدی، شتاب برابر خواهد بود با $a_۳ - a_۲$ و معادله نیرو برای جرم متصل به آن برابر خواهد بود با:

$$T_۲ - \frac{m}{۲}g = \frac{m}{۲}(a_۳ - a_۲) \Rightarrow \frac{T_۱}{۲} = \frac{m}{۲}(g + a_۳ - a_۲) \Rightarrow T_۱ = m(g + a_۳ - a_۲)$$

به همین ترتیب برای k امین قرقره و جرم خواهیم داشت:

$$T_۱ = m(g + a_{k+۱} - a_k)$$

معادله بالا تا $k = n-1$ برقرار است. برای قرقره آخر خواهیم داشت:

$$mg - T_n = ma_n \;\Rightarrow\; \frac{T_1}{2^{n-1}} = mg - m$$

با جمع کردن n معادله ایجاد شده:

$$(n-1+\frac{1}{2^{n-1}})T_1 = nmg + m(a_2 - 0) + m(a_3 - a_2) + \cdots + m(a_n - a_{n-1}) + m(0 - a_n) = nmg$$

$$T_1 = \frac{nmg}{n-1+2^{1-n}}$$

شتاب جسم اول برابر است با شتاب قرقره ۲ و در نتیجه:

$$a_2 = \frac{T_1}{m} - g = \frac{1-2^{1-n}}{n-1+2^{1-n}}g \;\Rightarrow\; 0$$

۲۶. گزینه ۳

از آن‌جا که پایه g به زمین متصل شده است پس پتانسیل آن صفر بوده و $V_0 = G(V_a - V_b)$، همچنین با توجه به محدود بودن اندازه V_0 و بزرگ بودن مقاومت بین دو نقطه a و b می‌توان نتیجه گرفت که $V_a \approx V_b$ و این بدین معنی است که جریانی بین این دو پایه در داخل جعبه سیاه وجود ندارد. در نتیجه جریان عبوری از R_1 و R_2 با هم برابر بوده و داریم:

$$\frac{V_b}{R_2} = \frac{V_o}{R_1 + R_2} \;\Rightarrow\; V_o = G\left(V_i - \frac{V_o R_2}{R_1 + R_2}\right) \;\Rightarrow\; V_o = V_i \frac{1}{\frac{1}{G} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

با توجه به اینکه $G >> \frac{R_1}{R_2}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$V_o = V_i \frac{R_1 + R_2}{R_2} \;\Rightarrow\; \frac{V_{out}}{V_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 11$$

۲۷. گزینه ۴

ابتدا سرعت ذره را در پایین مسیر آونگ محاسبه می‌کنیم. با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی خواهیم داشت:

$$MgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}Mv^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

حال ذره با این سرعت در میدان مغناطیسی رها می‌شود. اگر جهت میدان به سمت داخل صفحه باشد، نیروی مغناطیسی به سمت بالا خواهد بود و می‌تواند نیروی وزن ذره را خنثی کند، بنابراین خواهیم داشت:

$$Mg = BvQ \;\Rightarrow\; B = \frac{Mg}{vQ} \qquad . \qquad B = \frac{Mg}{Q\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{M^2 g}{2Q^2 L(1-\cos\theta)}}$$

۲۸. گزینه ۳

طبق قانون اسنل می‌دانیم که:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

$$\sin r = \frac{n_1}{n_2}\sin i \qquad . \qquad n_2 < -1 \;\Rightarrow\; \sin r > -\sin i$$

۲۹. گزینه ۱

دوره تناوب یک فنر برابر است با:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

پس دوره تناوب هر فنر برابر است با:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \qquad . \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

اگر دو فنر به صورت سری به هم بسته شوند، ضریب سختی آنها برابر می‌شود با:

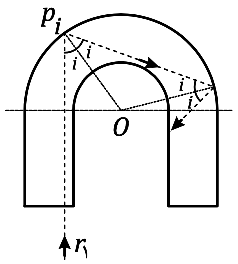
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\left(\frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2}\right) = T_1^2 + T_2^2$$

۳۰. گزینه ۴

مطابق شکل موجو در سوال، اگر پرتو r_1 در اولین برخورد با دیواره باز تاب داخلی گردد، پرتو r_2 نیز حتما بازتاب می‌گردد، چرا که زاویه آن با دیواره بیشتر از پرتو r_1 است. همچنین اگر پرتوها در اولین برخورد بازتاب نگردند، از شیشه خارج شده و دیگر امکان بازتاب برایشان میسر نیست. پس حالتی را بررسی می‌کنیم که پرتو r_1 در اولین برخورد باز تاب می‌گردد.

مطابق شکل روبرو، پرتو r_1 کاملا نزدیک به دیواره وارد شیشه می‌شود، در نتیجه حتما مسیر رسم شده را باید طی کند. چرا که زاویه‌های بازتاب و تابش با هم برابرند و همچنین می‌دانیم که پس از بازتاب اول، خط چین اول به دایره داخلی مماس و بر شعاع عمود می‌شود، زیرا به همین صورت مماس وارد کمان دایره شده است و بنابراین:



$$\sin i \geq \sin\theta_c \quad . \quad \sin\theta_c = \frac{1}{n_{glass}}$$

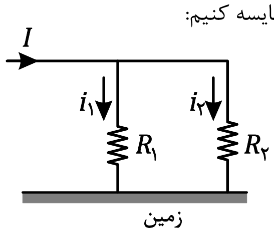
$$\frac{R}{R+d} \geq \frac{1}{n_{glass}} \xRightarrow{n_{glass}=1/5} R \geq 2d$$

در نتیجه کمترین مقدار نسبت $\frac{r}{d}$ برابر می‌شود با:

$$\left(\frac{R}{d}\right)_{\text{مینیمم}} = 2$$

۳۱. گزینه ۲

در واقع شرایط مشابه مدار مقابل است، و کافیست انرژی مصرفی دو مقاومت را با یکدیگر مقایسه کنیم:



$$\begin{cases} i_1 R_1 = i_2 R_2 \\ i_1 + i_2 \end{cases} \Rightarrow i_1 = \frac{I}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2}$$

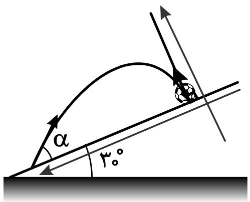
انرژی مصرفی در مقاومت در مدت‌زمان t برابر است با $E = RI^2 t$ بنابراین:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1 i_1^2 t}{R_2 i_2^2 t} = \frac{R_1}{R_2}\frac{\left(\frac{R_2 I}{R_1 + R_2}\right)^2}{\left(\frac{R_1 I}{R_1 + R_2}\right)^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

با توجه به فرض که $R_1 > R_2$ بنابراین $E_1 < E_2$ بنابراین نفر دوم با این فرض بیشتر آسیب می‌بینند.

۳۲. گزینه ۴

از آنجا که حرکت پرتابی متقارن است، می‌توانیم فرض کنیم توپ با سرعت v' از بالای سطح با زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق پرتاب کرده‌ایم و حال با توجه به این:



$$\vec{v} = (g\sin ۳۰^\circ t, v' - g\cos ۳۰^\circ t)$$

$$\vec{r} = (\frac{۱}{۲} g\sin ۳۰^\circ t^۲, v't - \frac{۱}{۲} g\cos ۳۰^\circ t^۲)$$

بنابراین، زمانی که توپ با سطح برخورد می‌کند، برابر است با:

$$v't - \frac{۱}{۲} g\cos ۳۰^\circ t^۲ = ۰ \Rightarrow v't = \frac{۱}{۲} g\cos ۳۰^\circ t^۲ \Rightarrow t = \frac{v'}{\frac{۱}{۲} g\cos ۳۰^\circ}$$

اما v' سرعتی است که باید محاسبه شود، پس:

$$\vec{v}_۰ = (g\sin ۳۰^\circ t, v' - g\cos ۳۰^\circ t)$$

$$\vec{v}_۰ = (۲\tan ۳۰^\circ v', -v')$$

$$v_۰ = \sqrt{(۲\tan ۳۰^\circ v')^۲ + (v')^۲}$$

$$v_۰ = v'\sqrt{(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})^۲ + ۱} \Rightarrow v' = v_۰\sqrt{\frac{۳}{۷}}$$

بنابراین با جایگذاری در زمان حرکت، داریم:

$$t = \frac{v'}{\frac{۱}{۲} g\cos ۳۰^\circ}$$

$$t = \frac{v_۰\sqrt{\frac{۳}{۷}}}{\frac{۱}{۲} g\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۷}}\frac{v_۰}{g}$$

۳۳. گزینه ۲

حال سرعت مجموعه بعد از وارد شدن و ساکن شدن گلوله در بلوک را محاسبه می‌کنیم:

$$mv = (m+M)u$$

$$u = \frac{m}{m+M} v$$

و از آنجایی که:

$$f = \mu N = -\mu(m+M)g \Rightarrow a = -\mu g$$

بنابراین:

$$۰ - u^۲ = -۲aL$$

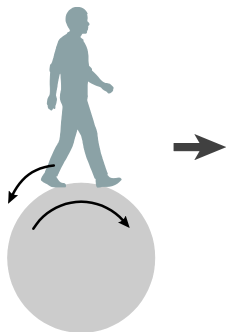
$$L = \frac{\frac{m^۲}{m^۲+M^۲} v^۲}{۲\mu g} = \frac{m^۲ v^۲}{۲(m^۲+M^۲)\mu g}$$

۳۴. گزینه ۱

وقتی کلید مدار زده می‌شود باید توجه کرد که مقاومت‌های سر راه $C_۲$ باعث می‌شود تا ابتدا خازن پر می‌شود، و این باعث می‌شود که در ابتدا جریان عبوری از خازن $C_۲$ صفر باشد و طبیعتاً بعد از پر شدن نیز جریان صفر باشد که این شرایط تنها در گزینه ۱ برقرار است.

۳۵. گزینه ۳

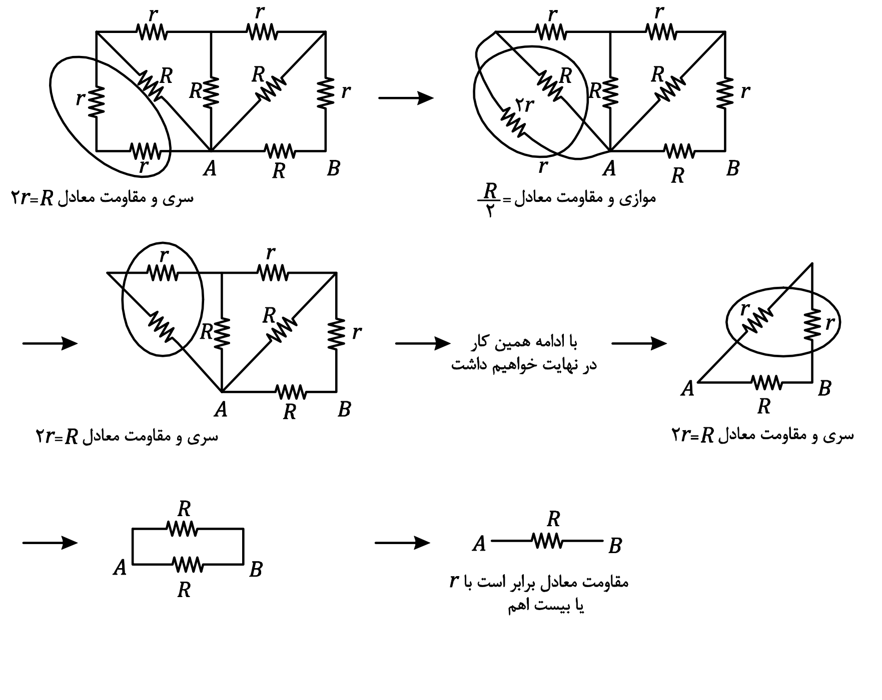
با توجه به اینکه وقتی ما روی سطحی راه می‌رویم جهت نیروی اصطکاکی که به ما وارد می‌شود هم‌جهت با حرکت ما است، پس طبیعتاً فرد در هر جهتی حرکت کند نیز باید جهت نیروی اصطکاک وارد شده به او در همان جهت باشد، اما چون برای جلو رفتن مجموعه توپ باید به صورت ساعتگرد دوران کند بنابراین فرد باید مانند حالتی که به سمت عقب راه می‌رود حرکت کند و نسبت به بالاترین نقطه توپ سرعت به سمت چپ داشته باشد تا مجموعه به سمت راست برود.



۳۶. گزینه ۱

با توجه به شکل ابتدا در نظر می‌گیریم که شکل مشابه زیر است:

تنها از سمت چپ می‌توانیم به راحتی مقاومت‌های موازی و سری را محاسبه کنیم:



۳۷. گزینه ۴

از آنجا که در واقع این چهارضلعی یک مربع کامل نیست، بهترین تخمین این است که قطر مربع هم مساحت با این چهارضلعی را بیابیم،برای این کار ضلع میانگین چهارضلعی را محاسبه می‌کنیم و سپس قطر مربعی به ضلع میانگین مربع را محاسبه می‌کنیم، که معادل است با گزینه چهار.

۳۸. گزینه ۳

ابتدا باید جریان گذرنده از باتری را پیدا کنیم، برای این کار ابتدا مقاومت معادل را محاسبه می‌کنیم با توجه به اینکه مقاومت خازن نیز برابر rاست:

$$i = \frac{\varepsilon}{\frac{rR}{r+R} + \alpha R}$$

حال باید جریان عبوری از خازن را در این لحظه پیدا کنیم، برای این کار توجه می‌کنیم به مقاومت‌هایrوR، اگر جریان گذرنده از خازن را i' بنامیم:

$$i' = (\frac{R}{r+R})i = \frac{(\frac{R}{r+R})\varepsilon}{\frac{rR}{r+R} + \alpha R} = \frac{\varepsilon}{r + \alpha(r+R)}$$

توجه کنید که اختلاف پتانسیل دو سر خازن با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومتRبرابر است، پس اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر خواهد بود با:

$$\Delta V = i'R = \frac{\varepsilon R}{r + \alpha(r+R)}$$

که با توجه به اینکه $q = C\Delta V$ بنابراین با توجه به اینکه $q = ۱\mu C$ ظرفیت خازن برابر است با $\frac{۱}{\Delta V}$ میکروفاراد:

$$C = \frac{(۱+\alpha)r + \alpha R}{\varepsilon R}$$

۳۹. گزینه ۴

اختلاف فشار درون و بیرون حلقه برابر است با $\Delta P = \frac{۱}{۲}\rho v^۲$، بنابراین یک نیروی مرکزگرا توسط هوا از بیرون به سمت داخل به حلقه وارد می‌شود، که برابر است با:

$$F_۲ = \Delta P \times d \times ۲\pi r = \pi r \rho v^۲ d$$

که اختلاف فشار ضرب در مساحت موثر است.rنیز شعاع متوسط حلقه دود است. حال:

$$\pi r \rho v^۲ d = m\frac{u^۲}{r}$$

بنابراین با توجه به اینکه $\rho' = \frac{۲m}{\pi^۲ d^۲ r} \Rightarrow m = \frac{\rho' \pi^۲ d^۲ r}{۲}$ بنابراین:

$$\pi r \rho v^۲ d = \frac{\rho' \pi^۲ d^۲ r}{۲}\frac{u^۲}{r} \Rightarrow r = \frac{\rho'}{\rho}\frac{\pi d}{۲}\frac{u^۲}{v^۲}$$

۴۰. گزینه ۲

از آنجا که اصطکاک نداریم و نیروی عمودی سطح هم همواره بر مسیر عمود است و کاری انجام نمی‌دهد، بنابراینا‌گر حلقه به اندازه Δh سقوط کند، سرعت آن عبارت خواهد بود از:

$$mg\Delta h = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲g\Delta h}$$

که با توجه به شکل میزان سقوط عبارت است از:

$$y_۱ = ۱۶$$
$$y_۲ = y(۲) = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$
$$\Rightarrow \Delta h_۱ = y_۱ - y_۲ = ۴$$

پس:

$$v = \sqrt{۲g \times ۴} = \sqrt{۸g}$$

۴۱. گزینه ۳

الکترون را مطابق شکل در نظر بگیرید، ابتدا نیروی مرکزگرای آن همان جاذبه الکتریکی است (از عوامل موثر دیگر صرف‌نظر کرده‌ایم)، پس:

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = e\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

حال با توجه به اینکه جریان ناشی از دوران الکترون به دور هسته برابر است با $I = \frac{ev}{2\pi r}$ در نتیجه میدان ناشی از این حلقه جریان در مرکز برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}$$

با توجه به سرعت الکترون داریم:

$$B = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi r^2}\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

۴۲. گزینه ۳

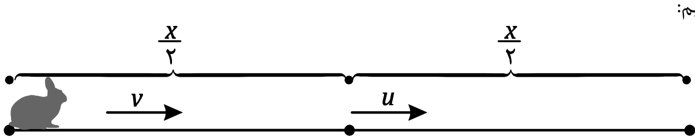
ابتدا متوجه‌می‌شویم که هر ۸/۷ گرم آهن یک سانتی‌متر مکعب حجم دارد. و هر مول آهن ۵۶ گرم است، بنابراین، ۸/۷ مول از آهن ۵۶ سانتی‌مترمکعب حجم دارد، پسدر هر ۵۶ سانتی‌مترمکعب، $7/8 \times 6/02 \times 10^{23}$ اتم وجود دارد:

$$I_{???} = \sqrt[3]{\frac{56cm^2}{7/8 \times 6/02 \times 10^{23}}} = \sqrt[3]{11/9 \times 10^{-23}} = 1/06 \times 10^{-8}cm$$

که نزدیک‌ترین مقدار به این عدد گزینه ۳ است.

۴۳. گزینه ۱

ابتدا سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:



با توجه به اطلاعات شکل، خواهیم داشت که:

$$\overline{V} = \frac{x}{\frac{\frac{x}{2}}{v} + \frac{\frac{x}{2}}{u}} = \frac{2vu}{v+u}$$

حال به سمت راست تساوی فوق و اطلاعاتی که داریم، توجه می‌کنیم که:

$$0 < v \Rightarrow 0 < u < v+u \Rightarrow 0 < \frac{u}{v+u} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{2vu}{v+u} < 2v \Rightarrow 0 < \overline{V} < 2v$$

۴۴. گزینه ۲

وقتی جریان عبور می‌کند و فنرها به طول آزاد خود برمی‌گردند، یعنی نیروی میدان وارد بر سیم به سمت بالا و برابر با وزن میله است. پس:

$$mg = ILB \Rightarrow I = \frac{mg}{LB} = \frac{2 \times 10^{-3}\,kg \times 10\frac{m}{s^2}}{0/1m \times 10^{-3}\,T_2} = 200A$$